MATHEMATICA - QUO VADIS? [1)]

Edmund Hlawka

Ich wurde von Herrn Oberstudienrat Dr.Kranzer aufgefordert, in der Zeitschrift "Wissenschaftliche Nachrichten" einen Artikel über die Entwicklung der Mathematik zu schreiben. Diese Zeitschrift, die der ungeheuren Energie und Arbeitskraft von Herrn Dr.Kranzer zu verdanken ist, informiert weite Kreise über Aktuelles in Mathematik und Physik. Früher waren viele Leute, auch Lehrer der Mathematik an Höheren Schulen,der Ansicht, daß es in der Mathematik eine richtige Entwicklung überhaupt nicht gibt. Man glaubte, die Mathematik ist ein für allemal gegeben und es kann sich höchstens darum handeln, sie immer wieder auf neue Arten methodisch und pädagogisch darzustellen. Wenn man aber die Bibliothek eines Mathematischen Instituts aufsucht, und man sieht sich die Mathematischen Journale an, so bemerkt man, daß die Veröffentlichungen, sagen wir nur aus reiner Mathematik, innerhalb eines Jahres einige zehntausend Seiten umfassen. Nach einer Auskunft der Redaktion des "Zentralblattes für Mathematik" erscheinen ungefähr 25.000 - 30.000 Arbeiten im Jahr. Es ist zuzugeben, daß natürlich das Zentralblatt auch Arbeiten aus Mathematischer Statistik, Computerscience und Angewandter Mathematik behandelt. Trotzdem ist es eine sehr große Zahl, wenn sie auch, um mit Hilbert zu sprechen, nur am Anfang der Zahlenreihe steht. Es sind natürlich nicht alle Arbeiten von gleichem Wert, aber dennoch wird die Mathematische Wissenschaft jedes Jahr um eine Reihe von neuen und wichtigen Resultaten bereichert.

Kein Mathematiker kann die Details aller dieser Entwicklungen verfolgen. Viele betrachten nur eine Ecke eines Teilgebietes der Mathematik, und man kann daher die Frage stellen, ob man überhaupt noch von <u>einer</u> Mathematik sprechen kann, oder ob es nicht <u>mehrere</u> Mathematiken gibt, die wie der Turm von Babel immer höher in den Himmel hineinwachsen und keiner den anderen mehr ver-

---

1) Leicht bearbeiteter und ergänzter Abdruck des gleichnamigen Artikels in: Wissenschaftliche Nachrichten, April 1979, 25-29.

steht. Man spricht heute von Verbandstheorie, Homologietheorie, Gruppentheorie, Algebraischer Geometrie, Geometrischer Algebra, usw. Ja, ich habe erst unlängst in einer Sitzung erlebt, daß aufgeregt debattiert wurde, ob diese hier aufgezählten Gebiete zur Algebra gehören oder nicht. Ich möchte noch einige weitere Beispiele anführen: Distributionstheorie, Informationstheorie und Intervallmathematik. Die Liste könnte mit Leichtigkeit fortgesetzt werden.

Nun muß aber gesagt werden, daß dieser Überfluß an Material nicht eine so neuartige Erscheinung ist. Solche Dinge sind immer wieder vorgekommen. Wir finden dies bereits zur Zeit der Griechen, wir finden es im 15. Jahrhundert, im 18. Jahrhundert, zur Zeit von *Euler*, *Lagrange* und *Gauß* und besonders stark im 19. Jahrhundert.

Ich möchte hier einen kurzen Überblick über die Geschichte der Mathematik und auch der Tendenzen in der Mathematik geben, natürlich ohne auf Einzelheiten einzugehen. Wir finden bereits 2000 v.Chr. in Ägypten, besonders aber in Babylonien, Indien und China, eine hochentwickelte Mathematik, die bis zu den Gleichungen 2-ten und 3-ten Grades geht. Sie wird uns in der Form von Aufgabensammlungen geboten. (Aber auch der Norden Europas sei nicht vergessen, *Stonehenge* (England) ist ein Lehrbuch der Mathematik und Astronomie in Stein.) An einer Fülle von Beispielen wird die Methode erläutert, ohne sie in Formeln, wie wir sie gewohnt sind, zusammenzufassen. Der Unterricht an der Unterstufe unserer Schulen war noch vor kurzem so gestaltet. Wir verdanken den Griechen die Idee, diese Regeln in Sätzen zu formulieren und sie zu beweisen, d.h. durch logische Operationen auf Sätze zurückzuführen, die nach allgemeiner Ansicht evident sind, bzw. über die ein allgemeiner Konsens herrscht. Über die Gründe, die die Griechen dazu bewogen haben, so vorzugehen, gibt es verschiedene Ansichten unter den Historikern der Mathematik.

Wir wissen ja heute, aber auch im alten Griechenland war dies schon bekannt, daß die Griechen viel Wissensgut von den Ägyptern, Babyloniern und Indern übernommen haben. Sie haben diese Dinge als Seeleute und als Kaufleute auf Reisen von den Priestern erfahren. Diese Priester erzählten ihnen viel Kurioses und Staunenswertes, aber auch Märchenhaftes. Die Griechen seien nun bestrebt gewesen, das Richtige vom Falschen zu unterscheiden und seien dabei auf die Methode des Beweisens, der Reduktion auf ihnen Bekanntes verfallen. Andere Historiker sagen wieder, daß die Methode der Argumentation der Streitparteien auf der Agora in Athen und an griechischen Gerichten auf die Mathematik übertragen wurde. Dies sei nötig geworden, als die Sophisten auf den Plan traten. Vor allem war es das Auftreten von *Zenon* in Athen, der die Thesen seines Lehrers *Parmenides*, daß das Sein sich nicht ändert, durch Beweise erhärten wollte. Denken wir nur an den fliegenden Pfeil, der nach Zenon tatsächlich stets in Ruhe ist und an das Beispiel von Achilles und der Schildkröte, nach dem es Achilles, dem sagenhaft schnellsten Läufer, nicht möglich ist, die Schildkröte, als Beispiel eines sehr langsamen Tieres, zu überholen. Die Zuhörer waren zwar der Überzeugung, daß diese Schlüsse nicht stimmen können, aber trotzdem sah man sich nicht imstande, sie sofort zu widerlegen.

Daher stellte sich die Akademie, insbesondere *Plato* und *Aristoteles*, die Aufgabe, die zulässigen Schlüsse der Logik zu formulieren, zu kodifizieren und alles, was beweisbar ist, auch wenn es noch so trivial erscheint, zu beweisen. Der Höhepunkt dieser Entwicklung sind die *Elemente* des *Euklid*. Hier wird von Axiomen ausgegangen und die Beweise werden lückenlos geführt. Man sehe sich zum Beispiel die Lehre vom Flächeninhalt und vom Volumen bei Euklid an.[1] Wir wissen ja heute, daß vor allem *Eudoxus* zu der Strenge in der Mathematik beigetragen hat. Ihm verdanken wir ja die erste strenge Lehre der nichtkommensurablen Strecken. Euklid, der diese Untersuchungen von Eudoxus in seinen Elementen dargestellt hat, ist das Modell und Muster strenger Beweisführung für Jahrtausende gewesen. Daneben ist natürlich die Methode, wie sie die Babylonier hatten, nämlich Regeln an Beispielen zu erläutern, im mathematischen Alltag geblieben. Ich möchte nur als

1) Vgl. z.B. E.Hlawka: Zur Geschichte des Inhaltsbegriffs, Didaktikreihe der ÖMG, Heft 2 (1980), 1-56.

Beispiel die Werke von *Heron* anführen. Für Heron, der im Museon von Alexandria Mathematik und Mechanik lehrte, war die Anwendung der Mathematik selbstverständlich die Hauptsache. Sogar *Archimedes*, der größte Mathematiker des Altertums, verwendet unendlich kleine und unendlich große Größen, wenn er auch in seinen Schriften ganz exakt nach Euklid vorgeht.

Die ausgehende Antike verläßt dann langsam die Euklidische Strenge, bringt aber eine Erweiterung der Mathematik. Ich denke hier nur an *Diophant*, der schon eine richtige Algebra im heutigen Sinn hat. Die Araber kommentieren und edieren das Werk der Griechen. Die Inder erweitern den Zahlenbereich durch Einführen der negativen Zahlen und der Null. Die Trigonometrie, die auch schon bei den Griechen vorhanden war, entwickelte sich nun zu einem richtigen System. Das Abendland nimmt im Mittelalter diese Leistungen langsam auf. Es vernachlässigt zwar weiterhin die Strenge von Euklid, fügt aber neue Dinge hinzu, vor allem taucht langsam der Funktionsbegriff auf. Wir wissen bis heute nicht alle Einzelheiten dieser Entwicklung. Jedenfalls treten die höheren Potenzen von Zahlen auf, zunächst nur bis zur 9-ten Potenz, und ein Rechnen mit Wurzeln entwickelt sich. Es treten Formeln auf, die allerdings anfangs nur Abkürzungen von Worten sind. Die Mathematiker der *Wiener Universität* sind an dieser Entwicklung führend beteiligt und ihre Werke finden sich in der Nationalbibliothek und in den Klöstern Österreichs. Teilweise sind diese Werke noch nicht ediert. Es sind vor allem deutsche Historiker, wie z.B. *Hoffmann* und *Kaunzner* in Regensburg, die sich um diese Schätze bemüht haben und bemühen. Jetzt beschäftigen sich auch österreichische Historiker mit der Hebung dieser Werke.

Die moderne Mathematik und die Formelsprache beginnt mit *Vieta*, von Hauptberuf Jurist, der die Formelsprache definitiv einführte, weitergeführt von *Kepler*, *Guldin*, *Galilei*, *Cavalieri*, *Descartes*, *Fermat*, *Pascal* und *Wallis*. Diese Entwicklung erreicht ihren Höhepunkt im Infinitesimalkalkül von *Newton* und *Leibniz*. Alle diese Mathematiker operierten mit unendlich kleinen und unendlich großen Größen, wie dies überhaupt der Renaissance eigentümlich ist, nicht nur im Kalkül, sondern auch in der Geometrie (vor allem in der starken Verwendung der Perspektive in Theater- und Gartenarchitektur). Noch stärker kommt dies im Barock zum Ausdruck. Bald setzt aber eine Ernüchterung ein, denn beim Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Größen stellten sich Widersprüche ein und man mußte sich dazu entschließen, diese Dinge auf eine strengere Grundlage zu stellen. Dies ist vor allem das Werk von *Cauchy*, *Weierstraß*, *Cantor* und *Dedekind*. Es wird die Theorie der reellen Zahlen aufgebaut und hauptsächlich durch Dedekind und *Peano* auf die Theorie der natürlichen Zahlen zurückgeführt. Schon bei Peano setzt eine axiomatische Entwicklung ein, d.h. das Ideal von Euklid, alles auf Axiome zurückzuführen, beginnt erneut. Gleichzeitig setzt aber durch Cantor bei seiner Mengenlehre eine neue Entwicklung ein. Das Revolutionäre bei Cantor besteht nicht darin, daß er das Wort "*Menge*" einführt, - der Begriff findet sich schon bei Weierstraß und kann bis Euklid zurückgeführt werden - sondern, daß er unendliche Mengen als Objekte des Denkens ansieht, d.h., daß er unendliche Mengen nicht mehr als Vielheit ansieht, sondern als eine Einheit. Damit wird ausgesprochen,daß unendliche Mengen *in actu* existieren, und nicht nur potentiell. Damit setzt er sich über eine Jahrtausende alte Tradition hinweg.

Cantor beschäftigte sich vor allem mit der Einteilung der unendlichen Mengen. Er teilte sie in verschiedene Schichten (Kardinalzahlen) ein und glaubte so, das Ziel erreicht zu haben, das *Unendliche* mathematisch eingefangen zu haben. Dedekind begründete sogar das Endliche durch das Unendliche. Doch bald stellten sich Widersprüche ein; es stellte sich heraus, daß man nicht beliebige Kollektive von Objekten zu einer Einheit zusammenfassen kann, man denke nur an das *Russelsche Paradoxon*. Um diesen Widersprüchen zu entgehen, geht *Zermelo* dazu über, die Mengenlehre axiomatisch zu begründen, eine Methode, die schon, wie gesagt, Peano zur Begründung der natürlichen Zahlen aufgestellt hatte, und die *Hilbert* bei seiner Begründung der euklidischen Geometrie zu so glänzendem Erfolg geführt hatte. Die axiomatische Methode setzte sich dann vor allem in der Algebra durch, besonders im *Göttinger Kreis* um Hilbert und *Emmy Noether* und um *Artin* und *Schreier* in Hamburg. Eine glänzende Zusammenfassung dieser Entwicklung ist das Buch von *van der Waerden* "*Moderne Algebra*". Das Wort "modern" zeigt schon das bewußte Auftreten dieser Richtung.

In der Analysis war die Entwicklung etwas langsamer. Ich möchte nur einige Namen nennen: *Hausdorff*, *Hans Hahn*, *Fréchet*,*Banach*. Die axiomatische Methode wurde dann zum Leitmotiv eines Arbeitskreises, der sich 1935 in Paris bildete und der den Decknamen *Nikolas Bourbaki* führt, erhoben. Ihre "*Elemente der Mathematik*" beginnen 1939 zu erscheinen und sind bis heute nicht vollständig, umfassen aber schon mehr als 30 Bände.

Zu dieser axiomatischen Methode, die ich später noch etwas erläutern will, möchte ich bemerken, daß wir in der Physik dieselbe Entwicklung haben. Dies war zunächst in der Relativitätstheorie der Fall, und dann noch stärker in der Quantenmechanik. Hier verläßt man sogar das Kontinuum der reellen Zahlen. Man betrachtet Größensysteme, die durch Operatoren beschrieben werden, welche nicht miteinander vertauschbar sind. Man paßt sich, kurz gesagt, der Struktur des betreffenden Gebietes an. Ein einfaches Beispiel, das ja jetzt geläufig geworden ist, ist das Beispiel der Gruppentheorie. Als konkretes Modell haben wir einerseits die Menge der reellen Zahlen und die Verknüpfung der Addition, welche aus der Menge nicht herausführt (ein Beispiel einer algebraischen Verknüpfung). Ein anderes Modell bilden die Translationen in der Ebene mit der zugehörigen Verknüpfung. In beiden Fällen gelten drei Eigenschaften, nämlich

1. das assoziative Gesetz,
2. es gibt ein neutrales Element,
3. es gibt zu jedem Element ein inverses Element.

Man sieht sofort, daß alle Eigenschaften, die aus diesen drei Eigenschaften gefolgert werden, gleichzeitig in beiden Gebieten gelten, aber es ist nicht notwendig, daß man in beiden Gebieten immer wieder von neuem die gleichen Folgerungen zieht. Wenn wir also Wiederholungen vermeiden wollen, so ist es zweckmäßig, ein für allemal alle logischen Konsequenzen aus diesen drei Eigenschaften zu ziehen; dann ergibt es sich aber von selbst, daß wir für diese drei Eigenschaften einen gemeinsamen Namen einführen müssen, damit wir sie nicht immer anführen müssen. Wir sagen, die Menge, die gewisse Eigenschaften besitzt, hat eine *Struktur*, bei unserem Beispiel sagen wir einfach, die Menge hat die Struktur einer *Gruppe*. Die Menge der Konsequenzen, die man daraus ziehen kann, nennt man die *Gruppentheorie*. Dies erscheint ganz selbstverständlich, ist es aber nicht, wenn wir uns daran erinnern, daß *Felix Klein*, der Begründer des *Erlanger Programms*, diese Formulierung der Gruppentheorie abgelehnt hat, und gemeint hat, daß kein solcher abstrakter Begriff neue Einsichten liefern kann. Heute finden wir eine solche Ansicht überraschend.

Es ist nun klar, was unter einer mathematischen Struktur zu verstehen ist. Es wird der gemeinsame Charakter von verschiedenen Begriffsbildungen herausgehoben, sofern er für verschiedene Mengen angewendet werden kann, deren Natur nicht genau festgelegt wird. Um eine Struktur zu definieren, denkt man sich eine oder mehrere Operationen gegeben. Dann postuliert man Relationen zwischen diesen Operatoren, die sogenannten Axiome dieser Struktur. Man zieht dann alle logischen Konsequenzen aus diesen Axiomen und sieht von allen Eigenschaften, die die betrachtete Menge noch haben könnte, ab. Man sieht sofort, daß dies eine ungeheure Vereinfachung der Mathematik bedeutet, und daß sie dadurch überschaubar wird. Allerdings bedeutet es nun aber auch, daß von diesem Standpunkt aus der Unterschied zwischen Geometrie und Algebra, Zahlentheorie und Analysis aufgehoben wird, und daß jetzt z.B. die Euklidische Geometrie in die Nähe der Theorie der Integralgleichungen rückt. Die Mathematik erscheint nun als eine Hierarchie von Strukturen, deren Grundlage die Mengenlehre ist.[1] Wir haben dann drei Grundstrukturen, nämlich 1. algebraische Strukturen, 2. Ordnungsstrukturen und 3. topologische Strukturen. Daran schließen sich die Tochterstrukturen, die durch Kombination aus Mutterstrukturen hervorgehen. Man kann z.B. Mengen betrachten, die sowohl eine algebraische Struktur als auch eine Ordnungsstruktur tragen. Sehr komplizierte Struktur weist z.B. der Körper der reellen Zahlen auf: hier haben wir Addition und Multiplikation, also eine algebraische Struktur, dazu kommt eine

1) Vgl. dazu z.B. E.Hlawka-Ch.Binder-P.Schmitt: Grundbegriffe der Mathematik, Prugg-Verlag Wien 1979, 195 S.

Ordnungsstruktur und als letzte die topologische Struktur (Grenzwert von Folgen, usw.). Man sagt, dieser Körper trägt eine Mammutstruktur. Bourbaki machte noch von einer weiteren Methode Gebrauch, nämlich daß er bei der Definition eines Begriffes jene Definition nimmt, welche die meisten Anwendungen zuläßt. Ich möchte das an einem Beispiel aus der elementaren Mathematik, welche ja bei Bourbaki nicht vorkommt, illustrieren. Ich fand dieses Beispiel im Buch von *Rademacher-Toeplitz*: *"Von Zahlen und Figuren"*. Üblicherweise definiert man den Kreis als den Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt einen konstanten Abstand haben. Daraus folgert man den Peripheriewinkelsatz, nach dem alle Peripheriewinkel über der gleichen Sehne den gleichen Wert haben. Es gilt aber auch die Umkehrung: der Ort aller Punkte, die eine feste Strecke unter dem gleichen Winkel sehen, ist ein Kreis. Man könnte nun diese zweite Eigenschaft als Definition des Kreises nehmen, weil sie gerade jene Eigenschaft ist, die am meisten gebraucht wird. Ich glaube, an diesem Beispiel dargelegt zu haben, welche Methode Bourbaki verwendet.

Der Erfolg dieses Programms war gerade unter den jungen Mathematikern außerordentlich groß, während die älteren Mathematiker diesen Ideen zur zögernd folgten. Struktur wurde direkt ein Schlagwort. In dieser Hinsicht ist dieses Wort heute jedem Schüler bekannt, auch die Zeitungen und die Politiker sprechen dauernd von Struktur; kurz gesagt, das Wort "Struktur" ist zu einem Modewort geworden. Ja, man hat die Mathematik geradezu definiert als die Wissenschaft der Strukturen. Dazu kommt noch, daß sogar psychologische Gründe mit angeführt werden, ich erinnere nur an die Untersuchungen von *Piaget*, aus denen man schließen zu können glaubte, der Begriff der mathematischen Strukturen sei den Menschen schon von Natur aus angeboren, und er hat sich langsam entwickelt. Damit schien gleichzeitig das alte Problem gelöst, nämlich das Problem: *Was ist Mathematik?*

Nach *Plato* haben die mathematischen Ideen eine außerphysikalische Existenz, eine Ansicht, die wohl die meisten der Mathematiker haben, wenn sie auch in dieser Hinsicht meist Platoniker mit einem kleinen p sind. *Kurt Gödel* war ein Anhänger dieser Richtung, und jeder Mathematiker, der mit einem mathematischen Problem zu ringen hat, weiß, wie schwer die Probleme zu lösen sind, und er nimmt wohl an, daß diese Dinge existieren.

Sicher war es eine hervorragende Leistung von Bourbaki, die mathematischen Strukturen auf die Mengenlehre zurückzuführen. Daß man dies tun kann, war den Mathematikern schon früher klar, aber dieses Programm auch wirklich durchzuführen, das war die große Leistung von Bourbaki; denn es gilt noch immer das lateinische Wort "*exempla trahunt*". In der Algebra hat uns dies ja *Emmy Noether* vorgeführt und Bourbaki hat es auch auf andere Teile der Mathematik angewendet. Trotzdem bedeutet das aber nicht, daß durch Bourbaki die Mathematik vollkommen erledigt ist, und die Begründer von Bourbaki sind zu große Mathematiker, um so etwas jemals behauptet zu haben. Auch die jetzigen Mitglieder von Bourbaki haben das nie erklärt.

Trotz aller dieser großen Erfolge der axiomatischen Denkweise und der Zurückführung auf die Mengenlehre ist die Kritik an Bourbaki doch nie ganz verstummt. Das erste Problem zeigt sich natürlich schon bei der Mengenlehre selber. Führt man die Mengenlehre nicht axiomatisch ein, betreibt also naive Mengenlehre, so ist das Ziel, nämlich die Mathematik in Strukturen aufzulösen, eigentlich nicht erreicht.[1] Dazu kommt ja noch, daß die naive Mengenlehre, wenn man nicht vorsichtig ist, die bekannten Antinomien aufweist. Führt man aber nun auch die Mengenlehre axiomatisch ein, dann tritt der Satz von *Gödel* in Kraft, wonach auf jedem formalisierten Gebiet innerhalb des Systems unentscheidbare Sätze auftreten müssen. Trotzdem ist es gelungen, dank der Untersuchungen von *Gentzen*, *Gödel*, *Spector*, *Kreisel*, *Fefermann*, *Takeuti* und *Schütte* große Teile der Analysis als widerspruchsfrei festzustellen. Andererseits haben die Untersuchungen von Gödel und *Cohen* nun gezeigt, daß gerade das berühmte *Kontinuumsproblem* ein unentscheidbares Problem ist, d.h. die Mächtigkeit von Teilmengen auf der Zahlengeraden kann nicht immer entschieden werden. Anders ausgesprochen, die Analysis und damit allgemein die naive Mengenlehre kann nicht vollständig

1) Vgl. das auf Seite 7 zitierte Buch.

axiomatisch begründet werden. Der Mathematiker *Solovay* hat in den sechziger Jahren weitere solche Unentscheidbarkeitssätze in der Analysis aufgestellt. Damit fällt, kurz gesagt, ein befriedigender axiomatischer Aufbau der Analysis, und damit auch ein Programmpunkt von Bourbaki.

Ein weiterer Gesichtspunkt kommt dazu, nämlich, daß die Mengenlehre für viele Aufgaben der Mathematik, insbesondere der Topologie, zu eng ist. Man muß z.B. zu den Mengen auch Unmengen hinzufügen, d.h. man muß von den Mengen zu Klassen übergehen, wie dies in dem Aufbau von *Neumann*, *Gödel* und *Bernays* der Fall ist. Man ersetzt daher jetzt oft die Mengenlehre durch die Lehre von den Kategorien und Universen. Es war in Bourbaki-Kreisen beabsichtigt, das Werk nicht mehr auf die Mengenlehre, sondern auf die Lehre von den Kategorien zu begründen. Allerdings ist diese Umarbeitung bis jetzt nicht erschienen. Es sind dann auch von verschiedenen Seiten Einwände gegen die Mengenlehre in anderer Hinsicht erhoben worden, nämlich, daß ja die Mengenlehre ein Axiom der Allwissenheit verlangt, d.h. man muß die Möglichkeit haben, von jedem denkbaren Objekt entscheiden zu können, ob es zu einer vorgegebenen Menge gehört oder nicht. Wir wissen heute, dank der Untersuchungen von Gödel und Cohen, daß das Auswahlaxiom von den anderen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist.

Wenn wir diese Betrachtungen zusammenfassen, so können wir also sagen, daß die Mengenlehre keine eherne Grundlage für die Mathematik bietet. Andere Grundlagen sind aber noch mehr umstritten. Der Intuitionismus von *Brouwer* und *H.Weyl* und der Konstruktivismus haben viel für sich. Dies würde aber die Opferung vieler Schlußweisen bedeuten, und die Mathematiker wollen dieses Opfer nicht bringen (ein Beispiel für dieses Opfer wäre der Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Der Konstruktivismus hat allerdings in letzter Zeit verstärkte Anhängerschaft gefunden. Der zunehmende Gebrauch des Taschenrechners, der ja nur rationale Zahlen ausrechnen kann, hat nämlich gezeigt, daß Sätze, die wir als richtig anzunehmen gewohnt sind, in der Realität kein Äquivalent haben. Ein einfaches Beispiel: die harmonische Reihe ist divergent; rechnen sie aber die Partialsummen der harmonischen

Reihe auf irgendeinem (intern vierstellig rechnenden) Taschenrechner aus, so werden Sie leicht bemerken, daß die Partialsummen gegen einen Wert konvergieren, der ungefähr um 8,5 liegt. Man kann sogar den Satz aussprechen: Jede Reihe, deren Glieder eine Nullfolge bilden, ist auf jedem Taschenrechner konvergent. Weiter zeigt sich, daß das kommutative Gesetz und das assoziative Gesetz der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen auf Taschenrechnern und allgemein auf Computern nicht immer gilt. Das hat zur Betrachtung von neuen mathematischen Strukturen, z.B. zur Intervallarithmetik, geführt. Ich möchte nur auf meinen Vortrag über die Zahlbegriffe, den ich 1975 in Krems gehalten habe, hinweisen.[1)]

Von steigender Wichtigkeit, gerade im Zeitalter der Computer, ist die Theorie der rekursiven Funktionen, von denen auch in Bourbaki keine Rede ist. Natürlich reichen die rekursiven Funktionen nicht aus, um die Analysis zu begründen. Es war bald klar, daß Gebiete wie analytische Zahlentheorie und komplexe Analysis in Bourbaki schwer einen Platz finden werden können, da ja die Methoden der analytischen Zahlentheorie bis jetzt noch nicht und wahrscheinlich auch auf absehbare Zeit nicht soweit durchleuchtet werden können, daß ein axiomatischer Aufbau möglich ist. All diese Dinge haben dazu geführt, daß jetzt eine Umkehr eingetreten ist. Man pflegt nun die Vorlesungen nicht mehr so abstrakt zu halten, wie noch vor einigen Jahren.[2)]

Es werden jetzt auch mehr Dinge behandelt, die für die Anwendungen wichtig sind. Gerade die Physiker haben sich beklagt, daß die Vorlesungen der Mathematiker für sie fast unbrauchbar wären (es sei nur an die Diskussion erinnert, die der französische Physiker *Kestler* mit Bourbaki geführt hat). Die Physiker und die Techniker haben sich auch über die mathematische Ausbildung an den Schulen beklagt. Sie fanden, daß die Schüler in Mengenlehre ausgebildet seien, aber nicht im numerischen Rechnen, und daß sie die einfachsten Formeln aus der Trigonometrie

1) Er wird in erweiterter Form unter dem Titel: Zum Zahlbegriff, in Philosophia naturalis, 1982, erscheinen.
2) Vgl. E.Hlawka: Bemerkungen zur Ausbildung von Lehrern, Zeitschrift für Hochschuldidaktik, Sonderheft S3 (1979), S.10-25.

nicht kennen. Auch in den Schulen hat jetzt eine Umkehr stattgefunden. Diese Umkehrung ist sicher zu begrüßen, aber es darf nicht dazu führen, daß man jetzt alles, was man neu eingeführt hat, über Bord wirft. Es wäre vollkommen verfehlt, jetzt wieder alle Beweise zu streichen und zu dem öden Beispielerechnen von früher zurückzukehren. Man darf nicht, um das eine Extrem zu bekämpfen, ein anderes Extrem einführen, der Mittelweg ist immer der richtige. Man kann sowohl einfachste Mengenlehre und einfache Strukturen behandeln, wie auch numerisches Rechnen betreiben, diese Dinge gehen sicher Hand in Hand. Ein Rechnen mit Restklassen, z.B. zeigt, daß das gewöhnliche Rechnen nicht das einzig mögliche ist, es fördert geradezu das numerische Rechnen. Wenn wir diese Diskussion zusammenfassen, so können wir sagen, es ist sicher zu eng, die Mathematik nur als ein System von Strukturen aufzufassen, ein inhaltliches Denken ist unentbehrlich. Die Mathematik ist komplex, und das ist auch gut so, denn sonst könnte ja ein Computer - eine Maschine - den Mathematiker völlig ersetzen. Die Mathematik ist, wie schon die Sätze von Gödel zeigen, ein nicht abgeschlossenes System und daher scheint es mir nützlich, auch in der Schule darauf hinzuweisen, daß die mathematischen Begriffe und Sätze einer ständigen Umbildung unterworfen sind, und daß sie nicht immer so aussahen, wie sie heute behandelt werden. Man denke z.B. an die Erschütterung der Mathematik, die durch die Entdeckung der *Nichteuklidischen Geometrie* durch *Gauß*, *Bolyai* und *Lobacevskij* in die Mathematik gekommen ist. Dinge, die man Jahrtausende lang für selbstverständlich gehalten hatte, wie das Parallelenpostulat, die scheinbar durch die Anschauung zwingend vorgeschrieben waren, erweisen sich als logisch nicht unentbehrlich. Man kann sich heute kaum mehr vorstellen, welche Erschütterung die Erkenntnis, daß man widerspruchsfrei Geometrien untersuchen kann, in denen die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180° ist, für die Mathematiker des 19. Jahrhunderts bedeutet hat. Daher erscheint es auch notwendig, Geschichte der Mathematik zu betreiben. Das soll nicht bedeuten, daß man jetzt alle Jahreszahlen auswendig lernt, das wäre grundverkehrt, sondern man soll die historische Entwicklung der mathematischen Begriffe behandlen. Gerade das kann zu kritischem Denken erziehen, das ja auch ein Ziel des Mathematikunterrichts ist. Dabei soll aber die Einwirkung der Mathematik auf andere Gebiete unseres Lebens (dazu gehören nicht nur die Naturwissenschaften und die Technik) nicht vernachlässigt werden. Dies ist gerade heute, wo die Zeiten schlechter werden und sich jedes Gebiet gegenüber der Gesellschaft zu rechtfertigen hat, notwendig geworden.

Es soll nun ein kurzer, notwendig subjektiver und unvollständiger Überblick über den gegenwärtigen Stand der Mathematik gegeben werden, der die vorhergehenden Ausführungen ergänzen soll. Wir wollen mit der am längsten explizit formulierten algebraischen Struktur, nämlich der *Gruppenstruktur* beginnen. Ein wichtuges Hilfsmittel in der Gruppentheorie ist die, von *R.Brauer* begründete Theorie der modularen Darstellungen. Das Hauptinteresse gilt nun den einfachen bzw. auflösbaren Gruppen, nachdem ein altes Problem von *Burnside* in einer der längsten Arbeiten, die wir kennen, von *Feit* und *Thompson* gelöst wurde. In engem Zusammenhang mit der Gruppentheorie steht die alte Theorie der algebraischen Gleichungen. *Galois* hat gezeigt, wie man jeder algebraischen Gleichung über einem Körper eine Gruppe zuordnet. Das berühmte Umkehrproblem beschäftigt sich mit der Frage, welche Gruppen als Galoisgruppen algebraischer Gleichungen über dem Körper der rationalen Zahlen auftreten können. Hier wurden in der letzten Zeit große Fortschritte erzielt. Für auflösbare Gruppen ist dieses Problem durch *Safarevic* positiv gelöst. Besonderes Interesse gilt den sogenannten exotischen oder sporadischen Gruppen, das sind endliche Gruppen von exorbitant hoher Ordnung (z.B. $2^{41}.3^{13}.5^{6}.11.13.17.19.23.47$), und die Untersuchung ihrer besonderen Eigenschaften steht im Mittelpunkt der Forschung. Überraschend ist das erneute Auftauchen der *Invariantentheorie*, die nach den grundlegenden Arbeiten von *D.Hilbert* als abgetan galt. Das *14.Hilbertsche Problem* (es handelt sich um die endliche Erzeugbarkeit der Invarianten eines Ringes rationaler Funktionen) wurde von *Nagata* im negativen Sinn gelöst. Die *algebraische Geometrie*, deren Aufbau von *M.Noether* (dem Vater von Emmy Noether) und *Severi* entwickelt wurde, deren Begründung vor allem durch *van der Waerden*, dann durch *Zariski* und A.*Weil* gegeben wurde, und *kommutative Algebra* wurden durch die Schemata von *Grothendieck* bereichert. Dieses hochwichtige Gebiet ist aber nur wenigen Spezialisten zugänglich, obwohl mit den Methoden dieses Gebiets wichtige Vermutungen, darunter jene von A.Weil gelöst wurden. Es gelang *Hironaka*, die alte Vermutung zu beweisen, daß jede algebraische Mannigfaltigkeit ein singularitätenfreies Modell besitzt.

Wie die Gruppenstruktur zur Gruppentheorie, so führt die Ring- bzw. Körperstruktur zur *Ring-* bzw. *Körpertheorie*. Die Theorie der Moduln erfordert die Methoden der homologischen Algebra, die heute eine hochentwickelte Theorie darstellt. In der Theorie der Ringe spielt die Theorie der Ideale eine wichtige Rolle. Dieser Begriff wurde bekanntlich von *Kummer* eingeführt, um die Fermatsche Vermutung zu beweisen. Dies ist zwar nicht gelungen, aber der Idealbegriff ist ein Begriff geworden, der die ganze Mathematik durchdringt. Für die algebraische Geometrie ist z.B. der Begriff der Polynomideale unentbehrlich. Hier sind vor allem der Schachweltmeister *E.Lasker* und der Schullehrer *F.S.Macaulay* zu nennen; wichtige Beiträge stammen von *Krull* und *Gröbner*. Die Erklärung dieses Begriffes ist so einfach, daß er auch in der Schule besprochen werden kann:
Ist R ein Ring (z.B. $\mathbb{Z}$), so besitzt ein Ideal $\mathfrak{a}$ in R folgende Eigenschaften:

(1) es ist $\mathfrak{a} \subset R$
(2) wenn $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{a}$, dann auch $a-b \in \mathfrak{a}$
(3) wenn $a \in \mathfrak{a}$, $r \in R$, dann auch $ra \in \mathfrak{a}$.

Ein Beispiel für ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist durch die Vielfachen einer Zahl a gegeben. (Der Begriff findet sich schon bei *Leibniz*.)

Neben Ringen, Körpern und Moduln ist der Begriff des *Vektorraumes* wichtig und so populär geworden, daß er in der Schule behandelt wird, wenn auch die Verwendung nicht immer sinnvoll erfolgt. Man rechnet heute die Sachverhalte, die mit Vektorräumen zu tun haben, zur *Linearen Algebra*. Die lineare Algebra beschäftigte sich ursprünglich mit der Auflösung linearer Gleichungssysteme. Dazu wird auch die Theorie der quadratischen Formen gerechnet. Die Darstellung dieses Gegenstandes ist jetzt ganz abstrakt geworden und wird oft als Vorbereitung in die Funktionalanalysis angesehen. Es sollte aber daneben auch der algebraische Sachverhalt klar dargestellt werden, und die praktische Seite, wegen der großen Wichtigkeit für die Anwendungen (man denke nur an die In- und Outputanalyse der Wirtschaft), deutlich herausgestellt werden. Das Rechnen mit Matrizen (weniger mit Determinanten) ist weiterhin unentbehrlich für die Mathematik und der Apparat der Matrizen ist außerordentlich schmiegsam. Welche Schätze hier noch schlummern, zeigen die Arbeiten von *O.Taussky-Todd*, die von Algebrentheorie bis zur numerischen Mathematik reichen. In der Algebrentheorie ist die Theorie der Jordanalgebren sowohl für die Quantentheorie wie für die Zahlentheorie von Wichtigkeit. Die *universelle Algebra* untersucht die allgemeinsten algebraischen Strukturen. Sie berührt sich eng mit Linguistik und mathematischer Logik. Das Gebiet steht überhaupt in engem Kontakt zu den verschiedenen Anwendungen, da ja ständig, z.B. in der Computerwissenschaft, neue algebraische Strukturen auftauchen. Die mathematische Logik steht umgekehrt in engem Kontakt zur Algebra, Zahlentheorie und Analysis. Sei liefert Methoden für den Beweis mathematischer Sätze, die durch althergebrachte Methoden nicht zu führen sind. Erst durch Kombination logischer und zahlentheoretischer Methoden ist es gelungen, das *10. Hilbertsche Problem* negativ zu lösen. Es beschäftigt sich mit der Existenz von Algorithmen zur Lösung diophantischer Gleichungen und hängt mit der Theorie der rekursiven Funktionen zusammen. Ein Nebenprodukt dieser Untersuchungen war die Aufstellung eines Polynoms in 24, bzw. in 12, Variablen, das alle Primzahlen darstellt. *J.P.Jones*[1] hat explizit ein solches Polynom in 26 Variablen angegeben. Es wird vermutet, daß bereits Polynome in drei oder sogar in zwei Variablen ausreichen würden (mit Polynomen in einer Variablen geht es bekanntlich nicht).

Die Hauptleistung der *mathematischen Logik* der letzten Zeit ist wohl die Aufstellung der *Non-Standard-Analysis* durch *Luxemburg* und *Robinson* (nach wichtigen Vorarbeiten von *Schmieden* und *Laugwitz*). Die unendlich kleinen Größen, von *Leibniz* und *Euler* so gerne verwendet, erhalten jetzt neues Bürgerrecht in der Analy-

1) Notices of the AMS, 22 (1975), 83-128.

sis und die Ideen von Leibniz können nun exakt formuliert werden.[1] Es gibt bereits ein Lehrbuch [2], welches diesen Gegenstand so behandelt, daß er in der Anfängervorlesung, statt der üblichen Form der Differential- und Integralrechnung vorgetragen werden kann. Ein anderes Gebiet, welches im 18. Jahrhundert eine große Rolle gespielt hat, aber dann vergessen wurde, wird jetzt wieder besonders wichtig. Es ist dies die *Kombinatorik*. Mathematiker aus aller Welt beschäftigen sich mit diesem Gebiet, das für die Anwendungen so bedeutsam ist. In der *Graphentheorie* wurden ebenfalls große Fortschritte erzielt. Der größte Triumph ist wohl die Lösung des *Vierfarbenproblems* 1976 durch *K.Appel* und *W.Haken* nach Vorarbeiten von *H.Heesch.* Die dabei verwendeten Ideen waren schon seit einiger Zeit bekannt. Der Lösung wurde zunächst mit großer Skepsis begegnet, da der Computer stark eingesetzt wurde. Der Beweis wurde aber überprüft und einige Teile der Lösung wurden bereits durch handfeste mathematische Beweise gestützt, so daß der Glaube an die Richtigkeit der Lösung stark gestiegen ist, und der Beweis wohl in Ordnung ist.

Die *Zahlentheorie* hat ebenfalls große Erfolge erzielt. Dies geschah durch Verfeinerung älterer Methoden und durch Einführung neuer Methoden, z.B. durch das große Sieb. Die Untersuchungen von *Baker* brachten große Fortschritte in der Theorie der diophantischen Gleichungen, wenn auch der *große Fermatsche Satz* noch nicht gelöst ist. Es ist aber sicher, daß kein numerisches Gegenbeispiel, wenn die Aussagen der Physiker über das Weltall stimmen, gefunden werden kann. Einen Satz von *A.Weil* über die Nullstellen der Kongruenzzetafunktion, welcher ursprünglich nur unter Verwendung schwieriger Methoden aus der algebraischen Geometrie bewiesen werden konnte, gelang es *Stepanow* durch elementare, wenn auch nicht einfache, Methoden zu beweisen und sogar zu verschärfen.

Die verschiedenen Einzelresultate über transzendente Zahlen können zu einem allgemeinen Satz, der sogar axiomatisch gefaßt wer-

1) Vgl. dazu E.Hlawka: Leibniz als Mathematiker, Philosophia naturalis 10 (1968) 146-168.
2) H.J. Kreisler: Foundations of Infinitesimals, Prindle, Weber & Schmidt, Boston 1976, IX + 214 S.

den kann, verdichtet werden. Dadurch werden die Untersuchungen tatsächlich durchsichtiger (hier hat Bourbaki recht). Hervorgehoben sei nun ein Resultat, welches auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1978 in Helsinki bekannt wurde. Es handelt sich um die Werte der *Riemannschen Zetafunktion* $(s > 1)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Der Funktionswert für gerades s wurde bekanntlich schon von *Euler* bestimmt, es ist z.B. $\zeta(2) = \pi^2/6$. Für ungerades s war nichts bekannt. Es gibt aber eine alte Vermutung, daß z.B. $\zeta(3)$ ein rationales Polynom von ln 2 ist. Es ist nun gelungen, zu zeigen, daß $\zeta(3)$ irrational ist, und der Beweis dieser Tatsache ist nicht schwierig. Dieses Ergebnis wurde von *Apery* 1977 gefunden. Das von *Yu Linnik* erfundene große Sieb hat zu ungeheuren Fortschritten in der Primzahltheorie geführt. Es sei nur ein Satz von *Chen* über das Goldbachsche Theorem angeführt, welchcher so weit geht, daß der volle Beweis des Goldbachschen Satzes in die Nähe rückt. Es erscheint aber zur Zeit ganz hoffnungslos, zu entscheiden, ob es tatsächlich nur endlich viele Fermatsche Primzahlen gibt, oder, ob es unendlich viele Mersennesche Primzahlen gibt. Computerunterstützte Rechnungen zu diesem Problem haben jüngst zu einer größeren (d.h.größer als $2^{19937}-1$, die lange als größte galt) Primzahl geführt, nämlich zu $2^{44497}-1$, 1979 durch *Slowinski* und *H.Nelson* bestimmt. Die algebraische Zahlentheorie hat in der Kohomologietheorie ein wichtiges Instrument erhalten; die Hoffnungen auf eine nichtabelsche Klassenkörpertheorie haben sich aber bis jetzt nicht erfüllt. Bekanntlich behandelt das Gaußsche Reziprozitätsgesetz quadratische Reste. Dieses Gesetz läßt sich im Bereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ formulieren, während analoge Gesetze für höhere als quadratische Reste bisher nicht in $\mathbb{Q}$ formuliert wurden. Hier ist in letzter Zeit ein Wandel eingetreten. Es gibt z.B. Reziprozitätsgesetze für biquadratische Reste, welche ganz in $\mathbb{Q}$ verlaufen.

Die *Geometrie der Zahlen* lag seit den großen Leistungen der 40-er und 50-er Jahre im Schlummer, nachdem einige anvisierte Ziele nicht erreicht wurden. Resultate von *Safarevic* und *Golod*, welche zeigen, daß diese Ziele gar nicht existieren, haben eine Änderung herbeigeführt.[1] Hinzugefügt seien noch die sensationellen Arbeiten aus den Jahren 1978 bis 1980 von *Sidelnikov*, G.A.*Kabatyanskii* und *V.L.Levenshtein*, die die Resultate von *Blichfeldt* über die dichteste Packung von Kugeln bedeutend verschärft haben. Diese Resultate gestatten wichtige Anwendungen in der Kodierungstheorie. Die glänzenden Erfolge in der Theorie der diophantischen Gleichungen wurden durch neue Resultate in der Theorie der diophantischen Approximationen von *K.F.Roth*, *A.Baker* und *W.Schmidt* herbeigeführt. Die von *H.Weyl* begründete Theorie der *Gleichverteilung* mit ihren Anwendungen auf Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und numerische Mathematik hat einige Fortschritte aufzuweisen. Es werden hier reelle Zahlenfolgen modulo 1 mit Hilfe der analytischen Zahlentheorie, insbesondere der Primzahltheorie, untersucht. Der allgemeine, abstrakte Teil der Theorie benützt Methoden der Funktionalanalysis, der Theorie der topologischen Gruppen und der harmonischen Analysis. Auf dem Gebiet der Gruppen ist das große Werk von *Harish-Chandra* hervorzuheben. Es werden jetzt Gruppen betrachtet, die durch die Quantentheorie und durch die Zahlentheorie nahegelegt werden. Die harmonische Analysis ist der allgemeine Rahmen für die berühmten Sätze von *Tauber* und *Wiener*, welche in der klassischen Analysis eine so wichtige Rolle spielen. Trotzdem behält die klassische Analysis ihr Eigenleben und sie bleibt für alle Anwendungen unentbehrlich. Die Konvergenztheorie der Fourierreihen mit ihrem engen Kontakt zur komplexen Analysis, gehört zu den schönsten Gebieten der Mathematik.

In der *Funktionentheorie* (komplexe Analysis) in einer Variablen, ist es *Ahlfors* und *Bers* gelungen, die Vermutungen von *Teichmüller*, die in der Kriegszeit formuliert wurden, zu beweisen. Die speziellen Funktionen, wie sie die Physik liefert, finden wieder die Aufmerksamkeit auch der reinen Mathematiker. Die algebraischen und automorphen Funktionen (lange im Hinter-

1) Vgl. dazu den Bericht des Verfassers: 90 Jahre Geometrie der Zahlen, Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1980, B.I., 9-41.

grund) sind durch *C.L.Siegel* und *A.Weil* wieder ins Blickfeld des allgemeinen Interesses gerückt und erleben eine Renaissance. Geheimnisvoll, nur wenigen zugänglich, tritt die Spurformel von *A.Selberg* auf, deren Bedeutung für die Funktionentheorie, Gruppentheorie und Zahlentheorie mehr und mehr erkannt wird. Die schlichten Funktionen werden noch immer eifrig studiert, der Beweis der Vermutung von *Bieberbach* ist zwar noch nicht gelungen, das Ziel erscheint aber doch schon nahe. Die Funktionentheorie in mehreren Variablen (manchmal auch analytische Geometrie genannt; ist aber nicht mit der von *Cartesius* begründeten Geometrie zu verwechseln) schreitet gemeinsam mit algebraischer Geometrie und algebraischer Topologie einher; wichtige Probleme wurden gelöst, viele Dinge blieben aber offen. Es seien hier nur genannt: der Japaner *Oka*, *H.Cartan*, *H.Behnke* und seine Schule: *K.Stein*, *Hirzebruch*, *Grauert* und *Remmert*. Die *Siegelschen Modulfunktionen* führen ins Neuland.

Unverändert ist die Bedeutung der *Variationsrechnung* (man denke an die Theorie von *M.Morse* und an die Theorie von *Pontrjagin*) welche für die Anwendungen unentbehrlich ist. Das Gleiche gilt für die Theorie der *Differentialgleichungen*. Die von *L.Schwartz* begründete Theorie der *Distributionen*, welche z.B. der *Diracfunktion* auch mathematisches Bürgerrecht verliehen hat, erfüllte zwar nicht alle Erwartungen, behält aber doch ihren dauernden Platz. Die Stabilitätstheorie in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und die erzielten Resultate in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sind so wichtig, daß sie für die Relativitätstheorie, Quantentheorie, aber auch für die Gasdynamik von großer Bedeutung sind. Es sei nur auf die Theorie von *Atiyah-Singer* hingewiesen, die jetzt auch in den Seminaren der theoretischen Physiker behandelt wird.

In der *Geometrie* ist neben der Beschäftigung mit der allgemeinen Theorie der Mannigfaltigkeiten ein erhöhtes Interesse an Elementargeometrie (dem Schweizer Mathematiker *Sydler* gelang es, ein altes Problem von *M.Dehn* aus der Inhaltstheorie der Polyeder vollkommen zu lösen[1]), an projektiver und konstruktiver

1) Vgl.den auf Seite 3 zitierten Artikel des Verfassers.

Geometrie und an der klassischen Differentialgeometrie des dreidimensionalen Raumes zu bemerken. Die Anwendungen dieser Gebiete auf Kodierung, Kinematik und Geodäsie werden erneut von großer Bedeutung. Mit zahlentheoretischen Methoden hat man in letzter Zeit (beim Österreichischen Mathematikerkongreß 1981 in Innsbruck wurde darüber berichtet) eine revolutionäre Verschlüsselungsmethode, die sogenannte RSA-Methode (benannt nach *R.L.Rivest*, *A.Shamir* und *L.Aldeman*) entwickelt, die für den Datenschutz äußerst wichtig ist. Die Theorie der konvexen Mengen und geometrischen Ungleichungen wird eifrig studiert und auf Variationsrechnung und Funktionalanalysis angewendet.

In der *Funktionalanalysis*, begründet durch *F.Riesz*, *Helly*, *H. Hahn* und *Banach*, wurde ein altes Problem über die sogenannte *Schauderbasis* im negativen Sinn gelöst. An diesem Problem läßt sich leicht zeigen, wie die Forschung fortschreiten kann. Die Entdeckung, daß Banachräume (das sind nichts anderes als normierte, vollständige Vektorräume,Verallgemeinerungen des gewöhnlichen Raumes), so schlimm sein können, daß sie keine Basis im Sinne von Schauder besitzen (auf technische Einzelheiten gehen wir nicht ein) wurde 1973 von dem damals sehr jungen nordischen Mathematiker *Per Enflo* gemacht und stieß zunächst auf Unglauben, bis man sich von der Richtigkeit seiner Behauptung überzeugte. Das von ihm angegebene Gegenbeispiel war außerordentlich pathologisch; aber die fortschreitende Entwicklung hat gezeigt, daß auch bravere Räume einen solchen Basismangel aufweisen können. Man sucht jetzt nach natürlicheren Beispielen. Ein Kandidat dafür wäre vielleicht der Raum der analytischen Funktionen auf gewissen Gebieten in der komplexen Zahlenebene. Ein Resultat in dieser Richtung wäre sowohl für die Funktionentheorie, wie auch für die Funktionalanalysis von großer Bedeutung. Wichtig sind auch die Anwendungen der Funktionalanalysis auf konkrete Probleme der Mathematik und Physik.

In der *Topologie* betrachtet man neue Strukturen kategorieller Topologien, bedingt durch die Theorie der Kategorien und Funktoren. Diese Theorie der Pfeile und Diagramme, anfänglich als abstrakter Nonsens bezeichnet, entwickelte sich rasch. Die von

Menger und *Urysohn* begründete Dimensionstheorie findet neue Beachtung, vor allem in der japanischen Schule. Die algebraische Topologie (begründet von *Riemann* und *Poincaré*, ausgebaut von *Brouwer, Tietze, Vietoris, Cech, Alexandroff* und *H.Hopf*) entwickelt sich stürmisch weiter. Der älteste Satz dieses Gebietes, aber auch heute noch einer der wichtigsten Sätze, ist der von *Descartes* und *Euler* aufgestellte Polyedersatz, der für konvexe Polyeder im dreidimensionalen Raum folgendermaßen lautet:

$$e + f - k = 2$$

(e = Anzahl der Ecken, f = Anzahl der Flächen, k = Anzahl der Kanten). Die Differentialtopologie brachte vor allem durch *Milnor* sensationelle Resultate und ist, man denke nur an die exotischen Sphären, für die Physik, besonders für die Theorie der Elementarteilchen und für die Kosmologie, von Interesse. Besonders sei aber die *Katastrophentheorie* von *R.Thom* (übrigens ein Gegner des extremen Bourbakismus) hervorgehoben. Diese Theorie gestattet ungeahnte Anwendungen auf Biologie und Medizin. Es erscheint jetzt möglich, solche Dinge wie Zellteilung mathematisch zu beschreiben. Es sei übrigens bemerkt, daß in der Medizin (abgesehen von der Statistik, die von den Medizinern schon lange benützt wird), jetzt auch tiefliegende mathematische Methoden Einzug halten. Es sei nur an die *Radontransformation* erinnert, die jetzt in den Spitälern in der Computer-Tomographie verwendet wird. Die Ergodentheorie (von *Boltzmann* und *Gibbs* zur Begründung der Gastheorie herangezogen) wurde von *J.von Neumann* und *Birkhoff* auf eine feste Basis gestellt. Diese Theorie, gemeinsam mit der topologischen Dynamik, ist von großer Bedeutung für die Untersuchung kettenbruchartiger Algorithmen in der Zahlentheorie, für die Differentialgeometrie, Informationstheorie und Physik geworden. Resultate von *C.L.Siegel, Arnold, Moser* und *Sinai* gestatten es nun, Probleme der Himmelsmechanik und Gastheorie mit Erfolg anzugreifen. Auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Maßtheorie ist wohl die Verbindung mit algebraischen Strukturen (ein erstes Beispiel findet sich schon bei Poincaré) und Potentialtheorie (*Choquet, H.Bauer*) hervorzuheben. Es ist weiter der Versuch einer neuen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie mit Hilfe der Theorie der rekursiven Funktionen anzuführen.

Die neuen Gebiete, wie *Endliche Mathematik*, *Computer-Science* und *Informationstheorie* werden die Mathematik in angeahntem Maß verändern. Es gibt jetzt sogar schon Computer, die algebraische Umformungen ausführen.[1)] Die Informationstheorie mit ihren zahlreichen Anwendungen in der Physik (Entropie) und Biologie (genetischer Code) kann, wenigstens in ihren Grundzügen, nun in der Schule leicht dargestellt werden (darauf hat mich *R.Sexl* hingewiesen). Eine enge Zusammenarbeit von Mathematikern, Naturwissenschaftlern, Technikern und Medizinern beim Studium mathematischer Modelle ist notwendig.

Vor 5000 Jahren hat die Reise der Mathematik begonnen. Wohin sie gehen wird, wissen wir nicht, wir können die Richtung nur im Nebel erahnen. <u>Jeder kann durch sein Wirken im Unterricht und am Schreibtisch den Kurs der Reise beeinflussen.</u>

1) Vgl. dazu den Artikel von W.Kranzer: Algebraisch arbeitende Computer, Wissenschaftliche Nachrichten 59 (1982), 30-31.

V O R S C H L A G S L I S T E

DER ÖMG

N A C H S C H L A G W E R K

A.D. Aleksandrov et al Herausg.: Enzyklopädie der Elementarmathematik
Berlin: Deutsch.Verl.Wiss. ab 1956

H. Athen, J. Brühn: Lexikon der Schulmathematik I - IV,
Köln: Aulis Verlag Debner & Co., 1976

H. Behnke et al. Herausg.: Grundzüge der Mathematik I - V,
Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1962

L. Kuipers, R. Timman: Handbuch der Mathematik,
Berlin: de Gruyter, 1968

Z E I T S C H R I F T E N

Praxis der Mathematik. Köln: Aulis Verlag Deubner & Co.

Der Mathematikunterricht. Stuttgart: Klett

Didaktik der Mathematik. München: Bayrischer Schulbuch-Verlag

Mathematiklehrer. Frankfurt: Hirschgraben-Verlag

ALLGEMEINE BETRACHTUNGEN ÜBER MATHEMATIK

M. Otte, Herausg.: Mathematiker über Mathematik.
Berlin: Springer 1974

A. Renyi: Dialogues on mathematics.
San Francisco: Holden Day 1967

Scientific American: Mathematics; An introduction to its spirit.
San Francisco: Freeman 1979

G. Polya: Mathematik und plausibles Schließen.
Basel: Birkhäuser 1962

G. Polya: Schule des Denkens.
Bern: Francke 1949

Ph.J. Davis, R.Hersh: The mathematical experience.
Boston: Birkhäuser 1981

R. Courant, H. Robbins: What is mathematics.
London: Oxford Univ.Press 1973

S.K. Stein: Mathematics. The man-made universe.
San Francisco: Freeman 1975

E. Schröder: Dürer; Kunst und Geometrie.
Basel: Birkhäuser 1980

L.A. Steen, Herausg.: Mathematics tomorrow.
New York: Springer 1981

D i d a k t i k

H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe I, II.
Stuttgart: Klett 1973

E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts.
Braunschweig: Vieweg 1975

W. Walsh, K. Weber Herausg.: Methodik-Mathematikunterricht.
Berlin: Volk und Wissen 1975

J. Dermolen: Didaktik der Mathematik.
Braunschweig: Vieweg 1978

BIOGRAHIEN UND ÄHNLICHES

W.K. Bühler: Gauss. A biographical study.
Berlin: Springer 1981

S. Kovalewskaya: A russian childhood.
New York: Springer 1978 (Autobiographie)

A. Dick: Emmy Noether: 1882-1935

C. Reid: Hilbert. Berlin: Springer